在本章中,我们将介绍几种消除项的近似值,将Navier-Stokes方程简化为更容易求解的简化形式.有时这些近似值适用于整个流场,但在大多数情况下,它们仅适用于流场的某些区域.我们首先考虑蠕动流,其中雷诺数非常低,以至于粘性项主导(并消除)了惯性项.之后,我们看两个适用于远离壁和尾流的区域的近似值:无粘流和无旋流(也称为势流).在这些地区,情况正好相反。即,惯性项支配粘性项.最后,我们讨论边界层近似,其中惯性和粘性项都保留,但一些粘性项可以忽略不计.最后一个近似适用于非常高的雷诺数(与蠕动流相反)和靠近壁面,与势流相反.

目标

读完本章后,您应该能够:

* 理解为什么近似值对于解决许多流体流动问题是必要的,并且知道何时何地使用这种近似值是合适的;
* 理解蠕动流中缺少惯性项的影响近似,包括密度从方程中消失;
* 将叠加理解为解决势流问题的一种方法;预测边界层厚度和其他边界层属性.

**10-1介绍** 2021年8月1日14点44分

在第9章中,我们推导出了具有常数性质的不可压缩牛顿流体的线性动量微分方程——纳​​维-斯托克斯方程.我们展示了一些简单(通常是无限)几何的连续性和Navier-Stockes方程的解析解的例子,其中微分方程中的大部分项都被消除了,所得的微分方程是解析可解的.不幸的是,文献中可用的已知分析解决方案并不多.事实上,我们可以在几个学生的手指上数出这样的解决方案的数量.绝大多数实际流体力学问题无法通过分析解决,需要(1)进一步近似或(2)计算机辅助.我们在这里考虑选项1;选项2将在第15章讨论.为简单起见,本章我们只考虑不可压缩的牛顿流体流动.

我们首先强调Navier-Stokes方程本身并不精确,而是一个流体流动模型,涉及几个内在的近似值(牛顿流体,恒定热力学和传输特性等).尽管如此,它仍然是一个优秀的模型,是现代流体力学的基础.在本章中,我们区分“精确”解和近似解(图10-1).当解以完整的Navier-Stokes方程开始时,使用术语“精确”.第9章中讨论的解是精确解,因为我们以方程的完整形式开始每个解.由于特定的几何形状或问题中的其他简化假设,在特定问题中消除了某些项.在不同的解决方案中,被消除的项可能不同,而是取决于特定问题的几何结构和假设.另一方面,我们定义了一个**近似解**,即在我们开始求解之前,Navier-Stokes方程在流的某些区域被简化.换句话说,根据问题的类别,先验地消除了一个或多个项,这可能从流的一个区域到另一个区域不同.

例如,我们已经讨论了一种近似,即流体静力学(第3章).这可以被认为是流体速度不一定为零但流体几乎停滞的流场区域中Navier-Stokes方程的近似,我们忽略所有涉及速度的项.在这个近似中,Navier-Stokes方程简化为两个项,压力和重力,即.近似值是Navier-Stokes方程中的惯性和粘性项与压力和重力项相比小到可以忽略不计.

尽管近似使问题更易于处理,但任何近似解都存在危险.也就是说,如果近似在一开始不适合,那么解决方案将是不正确的——即使我们正确地执行了所有数学运算.为什么?因为我们从不适用于手头问题的方程开始.例如,我们可以使用蠕动流近似来解决问题,并获得满足所有假设和边界条件的解决方案.然而,如果流动的雷诺数太高,蠕动流近似从一开始就不合适,我们的解决方案(无论我们多么自豪)在物理上是不正确的.另一个常见的错误是在不适合无旋性假设的流动区域中假设无旋流.底线是我们必须非常小心应用的近似值,并且我们应该始终尽可能地验证和证明我们的近似值.

最后,我们强调,在大多数实际的流体流动问题中,特定的近似值可能适用于流场的某个区域,但不适用于其他区域,在这些区域中,不同同的近似值可能更合适.图10-2定性地说明了液体从一个罐流向另一个罐的这一点.流体静力学近似适用于远离连接管的供应罐区域,而在接收罐中的程度较小.无旋流近似适用于靠近连接管的入口和通过管道的中间部分,那里不存在强粘性效应.在墙壁附近,边界层近似是合适的.某些区域的流动不满足任何近似的标准,必须在那里求解完整的Navier-Stokes方程(例如,接收罐中管道出口的下游).我们如何确定近似值是否合适?我们通过比较运动方程中各个项的数量级来查看是否有任何项与其他项相比小到可以忽略不计.

**10-2 无量纲化运动方程** 2021年8月1日14点58分

在本节中,我们的目标是对运动方程进行无量纲化,以便我们可以正确比较方程中各项的数量级.我们从不可压缩的连续性方程开始,

和Navier-Stokes方程的矢量形式,适用于具有常数性质的牛顿流体的不可压缩流动,

我们在表10-1中介绍了一些用于对运动方程进行无量纲化的特征(参考)缩放参数.

然后我们根据表10-1中的缩放参数定义几个无量纲变量和一个无量纲运算符,

请注意,根据我们在第9章中关于压力与压力差的讨论,我们根据压力差定义了无量纲压力变量.公式10-3中的每个带星号的量都是无量纲的.例如,虽然梯度算子的每个分量的维度为,但的每个分量的维度为(图10-3).我们将方程10-3代入方程10-1和10-2,仔细处理每一项.例如,和,所以方程10-2中的平流加速度项变为

我们对等式10-1和10-2中的每一项执行类似的代数运算.等式10-1根据无量纲变量重写为

将两边除以使方程无量纲后,我们得到

类似地,等式10-2被改写为

在乘以常数的集合使所有项无量纲后,变为

公式10-5方括号中的每一项都是参数的无量纲分组——Pi组(第7章).借助表7-5,我们命名这些无量纲参数中的每一个:左边的是**Strouhal数**,;右边第一个是**欧拉数**,;右边第二个是**弗劳德数**平方的倒数,;最后一个是**雷诺数**的倒数, .方程10-5 因此变成

在我们详细讨论具体的近似之前,有很多关于由方程10-4和10-6组成的无量纲方程组的评论:

* 无量纲连续性方程不包含额外的无量纲参数.因此,方程10-4必须按原样满足——我们不能进一步简化连续性,因为所有项都具有相同的数量级.
* 如果使用长度,速度,频率等,这是流场的特征.因此,等,我们使用符号∼来表示数量级.因此,方程10-6中的和等项的大小也是统一的数量级,并且彼此的数量级相同.因此,方程10-6中各项的相对重要性仅取决于无量纲参数St、Eu、Fr 和 Re 的相对大小.例如,如果St和Eu为1阶,但Fr和Re非常大,我们可以考虑忽略Navier-Stokes方程中的引力和粘性项.
* 由于方程10-6中有四个无量纲参数,动态相似性模型和原型之间的区别要求模型和原型的所有四个相同(和),如图 10-4 所示.
* 如果流动是稳定的,那么并且Strouhal数从无量纲参数列表中消失().等式10-6左侧的第一项随后消失,其在等式10-2中对应的非定常项也消失了.如果特征频率f非常小,使得,则该流动称为准稳态[quasi-steady].这意味着在任何时刻(或在缓慢周期循环的任何阶段),我们都可以解决问题,就好像流动是稳定的一样,方程10-6中的非定常项再次消失.
* 重力的影响是通常仅在具有自由表面效应的流动中很重要(例如,波浪,船舶运动,水电站大坝的溢洪道,河流).对于许多工程问题,没有自由表面(管道流,潜艇或鱼雷周围的完全淹没流,汽车运动,飞机飞行,鸟类,昆虫等).在这种情况下,重力对流动动力学的唯一影响是垂直方向上的静水压力分布叠加在由流体流动引起的压力场上.换言之,对于没有自由表面效应的流动,重力不会影响流动的动力学——它唯一的作用是在动压力场上叠加一个静水压力.

我们定义吸收静水压力影响的**修正压力**.对于z垂直向上定义的情况（与重力矢量的方向相反）,并且我们在z=0处定义一些任意参考基准平面,

这个想法是使用方程10-7的修正压力用一项替换方程 10-2 中的两项.纳维-斯托克斯方程(方程10-2)改写为

用代替P,并从方程10-2中删除重力项,弗劳德数从无量纲参数列表中消失.优点是我们可以求解没有重力项的Navier-Stokes方程形式.在根据修正压力求解Navier-Stokes方程后,使用方程10-7加回静水压力分布是一件简单的事情.图10-5中显示了二维库埃特流情况的示例.修正压力通常用于计算流体动力学(CFD)代码中,以将重力效应(垂直方向的静水压力)与流体流动(动态)效应分开.

请注意,不应在具有自由表面效应的流动中使用修正压力.现在我们准备进行一些近似,通过比较与方程10-6中相应项相关联的无量纲参数的相对幅度,我们可以消除方程10-2中的一项或多项.

**10-3 蠕动流近似** 2021年8月1日16点07分

我们的第一个近似值是称为蠕动[creeping]流的流体流动类别.此类流的其他名称包括斯托克斯流和低雷诺数流.正如后一个名称所暗示的那样,这些流的雷诺数非常小(Re≪1).通过检查雷诺数的定义,,我们看到当𝜌,V或L非常小或粘度非常大(或这些的某种组合)时,会遇到蠕动流.当您将糖浆(一种非常粘稠的液体)倒在煎饼上或将勺子浸入一罐蜂蜜(也非常粘稠)以添加到茶中时,您会遇到蠕动流(图10-6).

蠕动流的另一个例子是在我们周围和我们物体内部,尽管我们看不到它,即在微观生物体周围流动.微生物一生都生活在蠕动流态中,因为它们非常小,它们的大小只有几微米(),并且它们移动非常缓慢,即使它们可能在空气中或在粘度难以归类为“大”的水中游泳(室温下和).图10-7显示了一种在水中游动的沙门氏菌.细菌的物体只有大约1微米长;它的鞭毛(毛状的尾巴)在物体后面延伸几微米,作为它的推进机制.与其运动相关的雷诺数远小于1.

蠕动流也发生在润滑轴承的非常小的间隙和通道中的润滑油流动中.在这种情况下,速度可能不小,但间隙尺寸非常小(在几十微米的数量级),并且粘度相对较大(在室温下）.

为简单起见,我们假设重力效应可以忽略不计,或者它们只对静水压力分量有贡献,如前所述.我们还假设稳定流或振荡流,其阶次单位为 Strouhal数()或更小,因此非定常加速度项比粘性项(雷诺数很小)小几个数量级.方程10-6中的平流项是1阶的,,因此该项也消失了.因此,我们忽略等式10-6的整个左侧,它简化为

换句话说,流体(左侧)中的压力必须足够大,以平衡右侧(相对)较大的粘性力.然而,由于等式10-9中的无量纲变量是1阶的,所以两边平衡的唯一方法是与的数量级相同.等同于这些,

经过一些代数运算,

公式10-10揭示了蠕动流的两个有趣特性.首先,我们习惯于惯性主导的流动,其中压力差像一样缩放(例如,伯努利方程).然而,在这里,压力差的比例类似于,因为蠕动流是粘性主导流.事实上,纳维-斯托克斯方程的所有惯性项在蠕动流中都消失了.其次,密度作为Navier-Stokes方程中的一个参数已经完全消失(图10-8).通过写出方程10-9的量纲形式,我们可以更清楚地看到这一点,

谨慎的读者可能会指出,密度在蠕动流中的作用仍然很小.即,在雷诺数的计算中需要它.然而,一旦我们确定非常小,就不再需要密度,因为它没有出现在公式10-11中.密度也出现在静水压力项中,但这种影响在蠕动流中通常可以忽略不计,因为所涉及的垂直距离通常以毫米或微米为单位.此外,如果没有自由表面效应,我们可以使用修正压力代替方程10-11中的物理压力.

让我们更详细地讨论公式 10-11 中惯性项的缺失.游泳时依靠惯性(图10-9).例如,您进行一次划水,然后您可以在需要进行另一次划水之前滑行一段距离.当您游泳时,纳维-斯托克斯方程中的惯性项远大于粘性项,因为雷诺数非常大.(信不信由你,即使是极慢的游泳者也会以非常大的雷诺数移动！)

然而,对于在蠕动流态中游泳的微生物,惯性可以忽略不计,因此不可能滑行.事实上,方程10-11中惯性项的缺失对微生物的游泳设计产生了重大影响.像海豚一样摆动的尾巴会让他们无处可去.相反,它们长而窄的尾巴(鞭毛)以正弦运动的形式波动以推动它们前进,如图10-10中精子的情况所示.没有任何惯性,精子不会移动,除非它的尾巴在移动.他的尾巴一停,精子就停止移动.如果您曾经看过精子或其他微生物游动的视频剪辑,您可能已经注意到它们为了移动一小段距离而必须努力工作.这就是蠕动流的本质,它是由于缺乏惯性.仔细研究图10-10可以看出,精子的尾部已经完成了大约两个完整的波动周期,但精子的头部仅向左移动了大约两个头部长度.

我们人类很难想象在蠕动的流动条件下移动,因为我们已经习惯了惯性的影响.一些作者建议您想象尝试在一大桶蜂蜜中游泳.相反,我们建议您去一家设有儿童游乐区的快餐店,观看儿童在塑料球池中玩耍(图10-11).当孩子试图在球之间“游泳”(不接触墙壁或底部)时,他或她只能通过某些蛇形蠕动的物体动作向前移动.当孩子停止扭动时,所有的运动都会停止,因为惯性可以忽略不计.孩子必须非常努力地向前移动一小段距离.在这种情况下“游泳”的孩子与在蠕动流条件下游泳的微生物之间有一个微弱的类比.

我们接下来讨论公式10-11中密度的缺失.在高雷诺数下,物体上的空气动力阻力与𝜌成比例地增加.(当流体撞击物体时,密度较大的流体会对物体施加更大的压力.)然而,这实际上是一种惯性效应,在蠕动流中惯性可以忽略不计.事实上,空气阻力甚至不能是蠕动流中密度的函数,因为密度已经从Navier-Stokes方程中消失了.示例10-1通过使用量纲分析说明了这种情况.

**在蠕动流中拖动球体**

如示例10-1所示,特征量纲L的三维物体上的阻力在蠕动流动条件下以速度V移动通过粘度𝜇为的流体.量纲分析无法预测常数的值,因为它取决于流场中物体的形状和方向.

对于球体的特殊情况,可以解析求解方程10-11.详细信息超出了本文的范围,但可以在研究生级别的流体力学书籍中找到(White,2005;Panton,2005).事实证明,如果将L视为球体的直径 D(图10-13),则阻力方程中的常数等于.

作为旁注,这种阻力的三分之二是由于粘性力,另外三分之一是由于压力.这证实了方程10-11中的粘性项和压力项具有相同的数量级,如前所述.

在例10-2中可以清楚地看到蠕动方程中密度消失的结果.即,空气密度在任何计算中都不重要,除了验证雷诺数很小.(请注意,由于与相比非常小,因此可以忽略浮力,精度损失可以忽略不计.)假设空气密度是示例10-2中实际密度的二分之一,但所有其他属性没有改变.终端速度将是相同的(三位有效数字),除了雷诺数会小2倍.因此,

在蠕动流动条件下,致密小颗粒的终端速度几乎与流体密度无关,但高度依赖于流体粘度.

由于空气的粘度随高度变化仅约25%,因此无论高度如何,小颗粒都会以几乎恒定的速度沉降,即使当颗粒从50,000英尺的高度下降时,空气密度增加了10倍以上(15,000m)到海平面.≅

对于非球形三维物体,蠕流气动阻力仍然由给出;然而,常数不是3𝜋,而是取决于物体的形状和方向.该常数可以被认为是蠕动流的一种**阻力系数**.

**10-4 无粘性流动区域的近似值** 2021年8月1日17点08分

在流体力学文献中,关于inviscid一词和inviscid flow短语存在很多混淆.inviscid的表观意义是**无粘[not viscous]**.无粘性流似乎是指没有粘性的流体的流动.然而,这不是inviscid流这个词的意思!无论流场如何,所有与工程相关的流体都具有粘度.使用“无粘性流动”一词的作者实际上是指粘性流体在流动区域中的流动,在该区域中,与压力和/或惯性力相比,净粘性力可以忽略不计(图10-16).一些作者使用短语“无摩擦流动”作为无粘性流动的同义词.这会导致更多的混乱,因为即使在净粘性力可以忽略不计的流动区域,摩擦仍然作用在流体元素上,并且可能仍然存在显着的粘性应力.只是这些应力相互抵消,不会在流体元素上留下显着的净粘性力.可以证明,在这些区域中也可能存在显着的**粘性耗散**.正如第10-5节所讨论的,流动的无旋区域中的流体元素也具有可忽略的净粘性力——不是因为没有摩擦,而是因为摩擦(粘性)应力相互抵消.由于术语引起的混淆,目前的作者不鼓励使用“无粘流”和“无摩擦流”这两个词.相反,我们提倡使用**无粘性流动区域**或**净粘性力可忽略不计的流动区域**.

无论使用何种术语,如果净粘性力与惯性力和/或压力相比非常小,则公式10-6右侧的最后一项可以忽略不计.只有当1/Re很小时,这才是正确的.因此,流动的无粘性区域是高雷诺数的区域——与蠕动流区域相反.在这些区域,Navier-Stokes方程(方程10-2)失去粘性项并简化为**欧拉方程**,

欧拉方程只是忽略粘性项的纳维-斯托克斯方程;它是Navier-Stokes方程的近似/由于实心壁处的无滑移条件.

摩擦力在非常靠近实心壁的流动区域中是不可忽略的.在这种称为**边界层**的区域中,垂直于壁的速度梯度大到足以抵消1/Re的小值.另一种解释是,主体的特征长度标度(L)不再是边界层内最合适的长度标度,必须由与到壁的距离相关联的小得多的长度标度代替.当我们用这个较小的长度尺度定义雷诺数时,Re不再大,纳维-斯托克斯方程中的粘性项不能忽略.

可以在物体的尾流中进行类似的论证,其中速度梯度相对较大,并且与惯性项相比,粘性项不可忽略(图10-17).因此,在实践中,事实证明

欧拉方程近似适用于流动的高雷诺数区域,其中远离壁和尾流的净粘性力可以忽略不计.

在Navier-Stokes方程的欧拉近似中被忽略的项是包含速度的最高阶导数的项.从数学上讲,这一项的损失减少了我们可以指定的边界条件的数量.事实证明,当我们使用Euler方程近似时,我们无法指定固体壁上的无滑移边界条件,尽管我们仍然指定流体不能流过壁(壁是不可渗透的).因此,欧拉方程的解在实体壁附近没有物理意义,因为在那里允许流动滑动.尽管如此,正如我们在第10-6节中展示的,欧拉方程通常用作边界层近似的第一步.也就是说,欧拉方程适用于整个流场,包括靠近壁和尾流的区域,我们知道在这些区域近似是不合适的.然后,在这些区域中插入一个薄边界层作为校正以解决粘性效应.

最后,我们指出欧拉方程(方程10-13)有时用作CFD计算中的第一个近似值,以减少CPU时间(和成本).

**无粘性流动区域中伯努利方程的推导**

在第5章中,我们沿流线导出了伯努利方程.在这里,我们展示基于欧拉方程的替代推导.为简单起见,我们假设稳定的不可压缩流动.方程10-13中的平流项可以通过使用向量恒等式重写,

其中是向量的大小.我们将右侧括号中的第二项识别为**涡度向量**(参见第4章);因此,

并且稳定欧拉方程的另一种形式写为

我们将每一项除以密度并在梯度算子内移动𝜌,因为密度在不可压缩流中是恒定的.

我们进一步假设重力仅作用于方向(图10-18),因此

其中我们使用了坐标z的梯度是z方向上的单位向量的事实.还要注意g是一个常数,它允许我们在梯度算子内移动它(和负号).我们将等式10-16代入等式10-15,并通过在一个梯度算子中组合三个项来重新排列,

根据两个向量的叉积的定义,,向量与和都垂直.因此,等式10-17的左侧必定是处处垂直于局部速度向量的向量,因为出现在公式10-17右侧的叉积中.现在考虑沿三维流线的流动(图10-19),根据定义,流线处处平行于局部速度矢量.在沿流线的每一点,必须垂直于流线.现在清理你的向量代数书,回想一下标量的梯度指向标量最大增加的方向.此外,标量的梯度是垂直于标量恒定的假想表面的向量.因此,我们认为标量 沿着流线必须是常数.即使流动是旋转的()也是如此.因此,我们推导出了稳定不可压缩伯努利方程的一个版本,适用于净粘性力可忽略不计的流动区域,即所谓的无粘性流动区域.

请注意,公式10-18中的伯努利“常数”C仅沿流线是常数;常数可能会从流线型变为流线型.

您可能想知道在物理上是否可能存在同样无粘性的旋转流动区域,因为旋转性通常是由粘性引起的.是的,这是可能的,我们举一个简单的例子——实体旋转(图10-20).虽然旋转可能是由粘性力产生的,但固体旋转中的流动区域没有剪切力,也没有净粘性力;它是一个无粘性的流动区域,即使它也是旋转的.由于该流场的旋转性质,方程10-18适用于流动中的每条流线,但伯努利常数C因流线而异,如图10-20所示.

**10-5 无旋流近似** 2021年8月1日17点46分

正如在第4章中所指出的,存在流体粒子没有净旋转的流动区域;这些区域称为**无旋[irrotational]**区域.您必须记住,无旋性假设是一个近似值,这可能适用于流场的某些区域,但不适用于其他区域(图10-22).一般来说,远离固体壁和物体尾流的无粘性流动区域也是无旋的,尽管如前所述,在某些情况下,无粘性流动区域可能不是无旋的(例如,实体旋转).因此,为由无旋性定义的流动类别获得的解是完全Navier-Stokes解的近似值.在数学上,近似值是涡度小到可以忽略不计,

我们现在检查这种近似对连续性和动量方程的影响.

**连续方程**

如果你从你的向量代数书上抖掉更多的灰尘,你会发现一个关于任何标量函数的梯度旋度的向量恒等式,因此任何向量的旋度,

这在笛卡尔坐标中很容易证明(图10-23),但适用于任何正交坐标系,只要是平滑函数.换句话说,如果向量的旋度为零,则向量可以表示为标量函数的梯度,称为**势函数**.在流体力学中,向量是速度向量,其旋度是涡量向量,因此我们称**速度势函数**.我们写

我们应该指出,方程10-21中的符号约定并不通用——在一些流体力学教科书中,速度势函数的定义中插入了一个负号.我们用文字表述公式10-21如下:

在流动的无旋区域中,速度矢量可以表示为称为速度势函数的标量函数的梯度.

因此,无旋流区域也称为**势流区域**.请注意,我们并没有将自己限制在二维流中;方程10-21对三维流场有效,只要非旋转性的近似值适用于所研究的流动区域.在笛卡尔坐标系中,

在圆柱坐标系中,

将方程10-21代入方程10-1,即不可压缩连续性方程：,或

其中**拉普拉斯算子**是定义为的标量算子,方程10-24称为**拉普拉斯方程**.我们强调方程10-24仅在无旋流近似合理的区域有效(图10-24).在笛卡尔坐标系中,

在圆柱坐标系中,

这种近似的美妙之处在于我们将三个未知的速度分量(和或和,取决于我们选择的坐标系)组合成一个未知的标量变量𝜙,消除了求解的两个方程(图10-25).一旦我们得到方程10-24的𝜙解,我们就可以使用方程10-22或10-23计算速度场的所有三个分量.

拉普拉斯方程是众所周知的,因为它出现在物理,应用数学和工程的多个领域.文献中提供了各种求解技术,包括解析的和数值的.拉普拉斯方程的解由几何(即边界条件)决定.尽管方程10-24来自质量守恒,但质量本身(或密度,即每单位体积的质量)已完全排除在方程之外.有了一组给定的围绕流场的整个无旋区域的边界条件,我们就可以求解方程10-24的𝜙,而不管流体性质如何.一旦我们计算了𝜙,我们就可以计算流场该区域中的任何地方的(使用方程10-21),而无需求解Navier-Stokes方程.

该解适用于任何不可压缩流体,无论其密度或粘度如何,在适合无旋近似的流动区域中.该解对于非定常流动甚至是瞬时有效的,因为时间不会出现在不可压缩的连续性方程中.换句话说,在任何时刻,不可压缩流场都会立即自我调整,以满足拉普拉斯方程和该时刻存在的边界条件.

**动量方程**

我们现在将注意力转向微分线性动量方程——纳​​维-斯托克斯方程(方程10-2).我们刚刚表明,在流动的无旋区,我们可以在不应用Navier-Stokes方程的情况下获得速度场.那为什么我们需要它呢?答案是,一旦我们通过使用速度势函数建立了速度场,我们就可以使用Navier-Stokes方程来求解压力场.Navier-Stokes方程的简化形式是图10-25中提到的第二个必需方程,用于求解无旋流区域中的两个未知数𝜙和P.

我们通过对Navier-Stokes方程(方程10-2)的粘性项应用无旋流近似(方程10-21)来开始我们的分析.假设是一个平滑函数,则该项变为

其中我们应用了公式10-24。因此，Navier-Stokes方程在流动的无旋区域简化为Euler方程,

我们强调,虽然我们得到了与非粘性流动区域(方程10-13)相同的欧拉方程,但粘性项在这里消失的原因不同,即假设该区域的流动是非旋转而不是无粘性(图10-26).

**无旋流域中伯努利方程的推导**

在第10-4节中,我们基于欧拉方程沿流线导出了无粘性流动区域的伯努利方程.我们现在从方程10-25开始对流动的无旋区域进行类似的推导.为简单起见,我们再次假设稳定的不可压缩流动.我们使用之前使用的相同向量恒等式(方程10-14),导致方程10-15的欧拉方程的替代形式.然而,这里的涡量向量小到可以忽略不计,因为我们正在考虑流动的无旋区域(方程10-19).因此,对于作用在负z方向的重力,方程10-17简化为

我们现在论证,如果某个标量(方程10-26中括号中的量)的梯度处处为零,则标量本身必须是一个常数.因此,我们为流动的无旋区域生成伯努利方程,

比较公式10-18和10-27很有用.在无粘性流动区域,伯努利方程沿流线成立,伯努利常数可能会随流线变化.在流动的无旋区,伯努利常数处处相同,因此伯努利方程在流动的无旋区处处成立,甚至跨越流线.因此,无旋近似比无粘性近似更具限制性.

图10-27中提供了与流动的无旋区域相关的方程和求解程序的摘要.在无旋流区域,首先通过求解速度势函数的拉普拉斯方程𝜙(方程10-24)得到速度场,然后应用方程10-21得到速度场.为了求解拉普拉斯方程,我们必须为沿感兴趣流场边界的每个位置提供边界条件.一旦知道速度场,我们就使用伯努利方程(方程10-27)来获得压力场,其中伯努利常数C是从流动中某处P的边界条件获得的.

示例10-4说明了一种情况,其中流场由两个独立的区域组成——一个无粘性的旋转区域和一个无粘性的无旋转​​区域.

**二维无旋流域**

在流动的无旋区域,方程10-24和10-21适用于二维和三维流场,我们通过求解速度势函数的拉普拉斯方程𝜙来求解这些区域的速度场.如果流也是二维的,我们也可以使用流函数(图10-33).二维近似不仅限于平面中的流动,也不限于笛卡尔坐标.事实上,我们可以假设流动的任何区域都是二维的,其中只有两个运动方向是重要的,而第三方向没有显着变化.两个最常见的例子是**平面流**(平面内的流动,垂直于平面的方向变化可以忽略不计)和**轴对称流动**(其中围绕某个轴旋转对称的流动).我们也可以选择在笛卡尔坐标,柱坐标或球极坐标中工作,这取决于手头问题的几何形状.

**流动的平面无旋区**

我们首先考虑平面流,因为它是最简单的.对于笛卡尔坐标系中平面中稳定的,不可压缩的,平面的,无旋的流动区域(图10-34),𝜙的拉普拉斯方程为

对于平面中的不可压缩平面流,流函数𝜓定义为(第9章)

请注意,公式10-29适用于流动区域是旋转的还是非旋转的.事实上,流函数被定义为始终满足连续性方程,而不管旋转性如何.如果我们将近似限制在流动的无旋区域,则方程10-19也必须成立;即,涡量为零或小到可以忽略不计.对于平面中的一般二维流动,涡量的z分量是唯一的非零分量.因此,在流动的无旋区域,

将方程10-29代入该方程得到

我们在后一个方程中识别出拉普拉斯算子.因此,

我们得出的结论是,拉普拉斯方程不仅适用于(方程10-28),也适用于(方程10-30)在稳定,不可压缩,无旋,平面区域的流动.

𝜓常数值的曲线定义了流动的流线,而𝜙常数值的曲线定义了**等势[equipotential]线**.(请注意,一些作者使用短语等势线来指代流线和常数线𝜙,而不是专门用于常数线称为相互正交性(图10-35).此外,势函数𝜓和𝜙彼此密切相关——都满足拉普拉斯方程,并且从𝜓或𝜙我们可以确定速度场.数学家将𝜓和𝜙的解称为**调和函数**,而𝜓和𝜙则称为彼此的**调和共轭**.𝜓和𝜙虽然是相关的,但它们的起源有些相反;也许最好说𝜓和𝜙是互补的:

* 流函数由连续性定义;𝜓的拉普拉斯方程源于无旋性.
* 速度势由无旋性定义;𝜙的拉普拉斯方程是连续性的结果.

在实践中,我们可以使用𝜓或𝜙进行势流分析,无论哪种方式,我们都应该获得相同的结果.然而,使用𝜓通常更方便,因为𝜓上的边界条件通常更容易指定.

平面中的平面流也可以用圆柱坐标和来描述,如图10-36所示.同样,没有速度的z分量,并且速度在z方向上没有变化.在圆柱坐标系中,

笛卡尔坐标系中平面流的流函数𝜓由方程10-29定义,无旋性条件导致𝜓也满足拉普拉斯方程.在圆柱坐标系中,我们进行了类似的分析.回忆第9章,

留给你的练习是证明方程10-32定义的流函数也满足二维平面无旋流区域圆柱坐标中的拉普拉斯方程.(通过将公式10-31中的𝜙替换为𝜓来验证您的结果,以获得流函数的拉普拉斯方程.)

**流动的轴对称无旋区**

轴对称流是二维流的一种特殊情况,可以用柱坐标或球极坐标来描述.在圆柱坐标中,和是相关的空间变量,而和是非零速度分量(图10-37).因为旋转对称是关于z轴定义的,所以不依赖于角度𝜃.这是一种二维流,因为只有两个独立的空间变量,r和z.(想象一下,将图10-37中的径向分量r沿𝜃方向绕z轴旋转而不改变r的大小.)由于关于z轴的旋转对称性,速度分量和的大小在这样的旋转后保持不变.对于圆柱坐标中轴对称无旋流区域的情况,速度势𝜙的拉普拉斯方程为

为了获得轴对称流的流函数表达式,我们从r和z坐标中的不可压缩连续性方程开始,

经过一些代数,我们定义了一个同样满足方程10-33的流函数,

按照与平面流相同的程序,我们通过强制涡量为零来生成轴对称无旋流区域的𝜓方程.在这种情况下,只有涡量的𝜃分量是相关的,因为速度矢量始终位于平面中.因此,在流动的无旋区域

在z导数之外取r(因为r不是z的函数),我们得到

请注意,方程10-34与𝜓的拉普拉斯方程不同.您不能将拉普拉斯方程用于流动的轴对称无旋区域中的流函数(图10-38).

对于平面无旋流域,拉普拉斯方程对𝜙和𝜓都有效;但是对于轴对称的无旋流动区域,拉普拉斯方程对𝜙有效,但对𝜓无效.

这个陈述的一个直接结果是,轴对称无旋流区域中的常数𝜓曲线和常数𝜙曲线不是相互正交的.这是平面流和轴对称流之间的根本区别.最后,即使方程10-34与拉普拉斯方程不同,它仍然是一个线性偏微分方程.这允许我们在求解轴对称无旋流区域中的流场时,使用𝜓或𝜙的叠加技术。叠加将很快讨论.

表10-2总结了平面和轴对称无旋流区域的速度分量方程.

**无旋流域中的叠加**

由于拉普拉斯方程是线性齐次微分方程,方程的两个或多个解的线性组合也必定是一个解.例如,如果和都是拉普拉斯方程的解,则也是一个解,其中A,B和C是任意常数.推而广之,您可以组合拉普拉斯方程的多个解,并且该组合保证也是一个解.如果一个无旋流区域由两个或多个独立无旋流场的总和建模,例如位于自由流中的源,则可以简单地添加每个单独流的速度势函数来描述组合流场.添加两个或更多已知解以创建第三个更复杂解的过程称为叠加[superposition](图10-39).

对于二维无旋流区域的情况,可以使用流函数而不是速度势函数进行类似的分析.我们强调叠加的概念是有用的,但仅适用于无旋流场,其中𝜙和𝜓的方程是线性的.您必须小心确保要以矢量方式添加的两个流场都是无旋的.例如,射流的流场不应该添加到入口或自由流的流场中,因为与射流相关的速度场受粘度的影响很大,不是无旋的,并且不能被描述为势函数.

还可以证明,由于复合场的势函数是各个流场势函数的总和,因此复合场中任一点的速度都是各个流场速度的矢量和.我们在笛卡尔坐标系中证明了这一点,考虑一个平面无旋流场,该流场是由下标1和2表示的两个独立平面无旋流场的叠加.复合速度势函数通过

使用表中笛卡尔坐标系中平面无旋流的方程给出10-2,复合流速度的x分量为

您可以为𝜐生成一个类似的表达式.因此,叠加使我们能够简单地将流域中任何位置的单个速度矢量相加,以获得该位置的复合流场的速度(图10-40).

**基本平面无旋流**

叠加使我们能够添加两个或更多简单的无旋流解决方案,以创建更复杂(希望在物理上更重要)的流场.因此,建立基本构建块无旋流的集合是有用的,我们可以用它构建各种更实用的流(图10-41).基本平面无旋流在和/或坐标中描述,这取决于哪一对在特定问题中更有用.

**构建块1——均匀流**

我们能想到的最简单的均匀流是在x方向(从左到右).就速度势和流函数而言(表10-2),

通过将其中的第一个与x积分,然后将结果与y微分,我们生成了均匀流的速度势函数的表达式，

常数是任意的,因为速度分量总是𝜙的导数.我们将常数设置为零,知道这些我们可以随时添加任意常数.因此,

以类似的方式,我们为这个基本的平面无旋流生成流函数的表达式,

图10-42显示了均匀流的几条流线和等势线.注意相互正交性.

用圆柱坐标而不是直角坐标来表达流函数和速度势函数通常很方便,特别是当均匀流与其他平面无旋流叠加时.转换关系是从图10-36的几何中获得的,

从方程10-38和一点三角学,我们推导出u和𝜐在圆柱坐标方面的关系,

在圆柱坐标系中,𝜙和𝜓的方程10-36和10-37变为,

我们可以修改均匀流,使流体以速度V以与x轴成倾角𝛼的角度均匀流动.对于这种情况,和,如图10-43所示.留作练习以证明以角度𝛼倾斜的均匀流的速度势函数和流函数为

必要时,可以使用公式10-38将公式10–41轻松转换为柱坐标.

**构建块2——线源或线汇**

我们的第二个构建块流是线源.想象一条平行于轴的长度为的线段,流体沿着这条线在垂直于线段的所有方向上均匀地流出和流动(图10-44).总体积流量等于.当长度接近无穷大时,流动在垂直于线的平面中变为二维,流体从中逸出的线称为**线源**.对于无限长的直线,也接近无穷大;因此,考虑每单位深度的体积流量更为方便,称为**线源强度**(通常以符号m表示).

**线汇**与线源相反;流体在垂直于线汇的轴的平面内从各个方向流入线.按照惯例,正表示线源,负表示线汇.

最简单的情况是线源位于平面的原点,而线本身位于轴上.在平面中,线源看起来像原点处的一个点,流体从该点向平面中的所有方向向外喷出(图10-45).在距线源的任何径向距离处,径向速度分量可通过应用质量守恒找到.即,线源每单位深度的整个体积流量必须通过由半径定义的圆.因此,

显然,正如我们预期的那样,随着r的增加而减小.还要注意在原点是无穷大,因为r在方程10-42的分母中为零.我们称其为**奇点**——它当然是非物理的,但请记住,平面无旋流只是一个近似值,线源仍然可用作无旋流中叠加的构建块.只要我们远离线源中心附近,由线源和其他积木叠加产生的其余流场可能仍然是一个很好的代表物理现实流场中的无旋流区域.

我们现在生成速度势函数的表达式和线源强度的流函数的表达式.对于,我们使用柱坐标,从方程10-42开始,也认识到处处为零.根据表10-2,速度分量为

为了生成流函数,我们(任意)选择其中一个方程(我们选择第二个方程),对积分,然后对另一个变量𝜃求导,

我们从中积分得到

再一次,我们将任意的积分常数设为零,因为我们可以随时添加一个常数而不改变流量.通过对𝜙进行类似的分析,我们得到了原点处的线源的表达式如下:

图10-46为线源画了几条流线和等势线.如预期的那样,流线是射线(恒等𝜃的线),等势线是圆(恒等的线).流线和等势线除了原点是奇点外,其他地方相互正交.

当我们想把线源放在原点以外的地方时,我们必须小心地变换10-43式.图10-47描绘了位于平面任意点的一个源.我们定义为从源到流中的某一点P的距离,其中P位于或.类似地,我们定义为从源到点P的角度,从平行于x轴的直线测量.我们分析流,就好像源位于绝对位置的一个新的原点.因此,𝜙和𝜓的方程10-43仍然可用,但和必须被和取代.将和转换为或需要一些三角学知识.例如,在笛卡尔坐标系中,

**构建块3——线涡**

我们的第三个构造块流是平行于轴的线涡.与前面的构建块一样,我们从线涡位于原点的简单情况开始(图10-50).为了方便,我们再次使用柱坐标.速度分量是

其中称为**环流[circulation]**或**涡旋强度[vortex strength]**.按照数学中的标准惯例,正数表示逆时针的漩涡,负数表示顺时针的漩涡.将方程10-45积分,得到流函数和速度势函数的表达式,

比较方程10-43和10-46,我们看到线源和线涡在某种程度上是互补的，因为𝜙和𝜓的表达式相反.

对于我们想要将漩涡放置在原点以外的地方的情况,我们必须像对线源那样对方程10-46进行变换.图10-51描绘了位于平面任意点的线涡.我们像前面一样定义和(图10-47).为了得到𝜙和𝜓的表达式,我们将等式10-46中的和替换为和,然后转换为规则坐标,可以是笛卡尔坐标,也可以是圆柱坐标.在笛卡尔坐标系中,

**构建块4——双重流**

我们的第四个也是最后一个构建块流叫做双重流.虽然我们把它看作是叠加的基础,但正如例10-5所讨论的那样,双重流本身是由前面两个基础的叠加产生的,即等值的线源和线汇.在那个例题中得到了复合流函数,结果在这里重复:

现在假设从原点到源和从原点到汇的距离接近于零(图10-55).你应该记得接近对于角度的很小值(以弧度为单位).因此,当距离趋近于0时,公式10-48简化为

如果我们收缩a,同时保持同样的资源和汇聚力量(和-),当时,源和汇相互抵消,使我们完全没有流.但是,假设源汇靠近时,它们的强度与距离成反比,因此乘积保持不变.在这种情况下,在任意点P除了非常接近原点,方程10-49化简为

为了方便,我们定义了双重强度.速度势函数以类似的方式得到,

图10-56中绘制了双峰的几条流线和等势线.流线是与x轴相切的圆,等势线是与y轴相切的圆.除了奇点原点以外,这些圆都以90度角相交.

如果K为负,则双重态是“反向的”,汇位于(原点左侧无限小),源位于 (原点右侧无限小).在这种情况下,图10-56中所有的流线将是相同的形状,但流动将朝着相反的方向.下面的练习是构造与x轴对齐的偶线的表达式:𝛼.

**叠加形成的无旋流**

现在我们有了一组构建块的无旋流,我们准备通过叠加技术构建一些更有趣的无旋流场.我们将示例限制在xy平面中的平面流;轴对称流叠加的例子可以在更高级的教科书中找到(例如,Kundu等人2011;Panton,2005;Heinsohn和 Cimbala,2003).请注意，即使轴对称无旋流的𝜓不满足拉普拉斯方程,但𝜓的微分方程(方程10-34)仍然是线性的,因此叠加仍然有效.

**线汇和线涡的叠加**

我们的第一个例子是线源强度(在这个例子中是一个负数)和一个线涡强度为的叠加,这两个源都位于原点(图10-57).这表示水槽或浴缸中排水管上方的流动区域,在该区域中,流体以螺旋形流向排水管.我们可以叠加𝜓或𝜙.我们选择𝜓并通过为源(方程10-43)添加𝜓和为线涡旋(方程10-46)添加𝜓来生成复合流函数,

为了绘制流的流线图,我们选择的值,然后将r作为𝜃的函数或𝜃作为r的函数求解.我们选择前者;经过一些代数我们得到

我们为和选择一些任意值,以便我们可以生成一个图;即,我们设和.请注意对于水槽是负的.还要注意和的单位很容易获得,因为我们知道平面流中流函数的维数是{length2/time}.使用公式10-53计算了几个𝜓值的流线,并绘制在图10-58中.

通过对方程10-52进行微分,可以得到该无旋流中任何一点的速度分量,

我们注意到在这个简单的例子中,径向速度分量完全归因于下沉,因为涡流对径向速度没有贡献.类似地,切向速度分量完全归因于涡流.流体中任意一点的合成速度是这两个分量的矢量和,如图10-57所示.

均匀流和双峰的叠加——流过圆柱体

我们的下一个例子是流体力学领域的经典例子,即速度为的均匀流和位于原点的强度K双峰的叠加(图10-59).我们通过添加方程10-40——用于均匀流和来方程10-50——用于原点的双峰来叠加流函数.因此复合流函数是

为方便起见,当时,我们设𝜓=0(原因很快就会明了).方程10-54如果然后求解双峰强度K,

方程10-54变为

从公式10-55可以清楚地看出,其中一条流线()是半径为a的圆(图10-60).我们可以通过求解方程10-55的作为的函数来绘制这个流线和其他流线,反之亦然.但是,正如您现在应该意识到的,通常最好以无量纲参数的形式呈现结果.通过检查,我们定义了三个无量纲参数,

其中角度已经是无量纲的.根据这些参数,方程10-55写为

我们通过使用二次规则求解方程10-56中的作为𝜃的函数,

使用公式10-57,我们在图10-61中绘制了几个无量纲的流线.现在你明白为什么我们选择圆(或)作为零流线了——这个流线可以被认为是一个实心壁,这个流代表了一个圆柱体上的势流.未显示的是圆内的流线——它们存在,但与我们无关.

在这个流场中有两个驻点,一个在圆柱体的前端,一个在尾部.驻点附近的流线相距很远,因为那里的流动非常缓慢.相比之下,圆柱体顶部和底部附近的流线靠得很近,表示快速流动的区域.从物理上讲,流体必须在圆柱体周围加速,因为它是流动的障碍物.

另请注意,流动关于x轴和y轴对称.虽然从上到下的对称并不奇怪,但从前到后的对称可能是出乎意料的,因为我们知道围绕圆柱体的真实流动会在圆柱体后面产生一个尾流区域,而流线是不对称的.但是,我们必须记住,这里的结果只是实际流量的近似值.我们已经假设流场中处处都具有无旋性,并且我们知道这种近似在壁附近和尾流区域是不正确的.

我们通过微分方程10-55来计算流场中各处的速度分量,

一个特殊情况是在圆柱体本身的表面上,其中方程10-58简化为

由于在进行无旋近似时不能满足实体壁处的无滑移条件,因此圆柱壁处存在滑移.事实上,在圆柱体的顶部(),壁处的流体速度是自由流的两倍.

图10-64中压力分布对称的一个直接结果是气缸上没有净压力阻力(车身前半部的压力与车身后半部的压力完全平衡).在这种无旋流近似中,压力在后滞点处完全恢复,因此那里的压力与前滞点处的压力相同.我们还预测物体上没有净粘性阻力,因为我们在进行无旋近似时无法指定物体表面的无滑移条件.因此,在无旋流中气缸上的净气动阻力完全为零.这是在进行无旋流近似时适用于任何形状(甚至不对称形状)的更一般陈述的一个例子,即让-勒-朗德·达朗贝尔 (1717-1783)首先提出的著名悖论在1752年:

D’Alembert 悖论:在无旋流近似下,任何形状的非升力物体浸入均匀流中的空气动力阻力为零.

D'Alembert认识到他的陈述的悖论,当然,他知道浸入真实流体中的真实物体存在空气动力学阻力.在实际流动中,物体后表面的压力明显小于前表面的压力,导致物体上的非零压力阻力.如果主体是钝的并且存在流动分离,则该压力差会增强,如图10-65所示.然而,即使对于流线型的物体(例如低攻角的飞机机翼),物体后部附近的压力也永远不会完全恢复.此外,物体表面的无滑移条件也会导致非零粘性阻力.因此,无旋流近似在其对气动阻力的预测中达不到要求,原因有二:它预测没有压力阻力和它预测没有粘性阻力.

何圆形体形状前端的压力分布与图10-64中绘制的压力分布在性质上相似.即,前驻点(SP)处的压力是物体上的最高压力:,其中V是自由流速度(我们去掉了下标∞),而 那里.沿体表向下游移动,压力下降到某个最小值,此时P小于 P∞ (Cp < 0)。这个点，刚好在物体表面上方的速度最大，压力最小，通常被称为物体的空气动力学肩部。在肩膀之外，压力慢慢上升。对于无旋流近似，压力总是在后驻点处升回到动态压力，其中 Cp = 1。然而，在实际流动中，压力永远不会完全恢复，导致如前所述的压力阻力。在前停滞点和气动肩部之间的某处是体表上的一个点，在该点正上方的速度等于 V，压力 P 等于 P∞，Cp = 0。该点称为零压力点，该短语显然基于表压，而不是绝对压力。在这一点上，无论物体在流体中移动的速度有多快，垂直于体表作用的压力都是相同的 (P = P∞)。这一事实是影响鱼眼位置的一个因素（图 10-66）。如果鱼的眼睛靠近鼻子，鱼游动时眼睛会感受到水压增加——它游得越快，它眼睛上的水压就越高。这会导致软眼球扭曲，影响鱼的视力。同样，如果眼睛位于更靠后的位置，靠近空气动力学肩部，当鱼游泳时，眼睛会受到相对的吸力，再次扭曲眼球并模糊其视力。实验表明，鱼的眼睛位于非常靠近 P = P∞ 的零压力点的位置，并且鱼可以以任何速度游泳而不会扭曲其视觉。顺便提一下，鳃的后部靠近空气动力学肩部，因此那里的吸力有助于鱼“呼气”。心脏也位于这个最低压力点附近，以在快速游泳时增加心脏的每搏输出量。如果我们更仔细地考虑一下无旋流近似，我们就会意识到我们在示例 10-7 中建模为实心圆柱体的圆根本不是实心壁——它只是流场中的一条流线建模为实体墙。我们建模为实心墙的特定流线恰好是一个圆。我们可以很容易地在流中挑选一些其他的流线来模拟实体墙。因为根据定义，流动不能穿过流线，而且我们不能满足壁面的无滑移条件，所以我们声明如下： 例如，我们可以将图 10-61 中的任何流线建模为实体壁。让我们取圆上方的第一条流线，并将其建模为墙。 （该流线的无量纲值为 𝜓 \*=0.2。）图 10-67 中绘制了几条流线；我们没有在流线𝜓 \*=0.2 下方显示任何流线——它们仍然存在，只是我们不再关心它们。这代表什么样的流量？好吧，想象一下风吹过一座小山；图 10-67 中所示的无旋近似代表了这种流动。我们可能会预料到非常接近地面的不一致，也许在山的下游一侧，但山的前侧的近似值可能非常好。您可能已经注意到这种叠加的问题。也就是说，我们首先执行叠加，然后尝试定义一些可能由我们生成的流建模的物理问题。虽然作为一种学习工具很有用，但这种技术在现实工程中并不总是实用的。例如，我们不太可能遇到形状与图 10-67 中建模的山丘完全相同的山丘。相反，我们通常已经有了一个几何体，并希望对流过或穿过该几何体的流动进行建模。有更复杂的叠加技术可用，更适合工程设计和分析。即，存在将大量源和汇放置在适当位置以便对预定几何形状上的流动进行建模的技术。这些技术甚至可以扩展到完全三维的无旋流场，但由于涉及的计算量很大，因此需要一台计算机（Kundu 等，2011）。我们不在这里讨论这些技术。

我们在本节结束时强调，尽管无旋流近似在数学上很简单，并且速度和压力场很容易获得，但我们在应用它时必须非常小心。 无旋流近似在涡度不可忽略的区域失效，尤其是在固体壁附近，由于壁处的无滑移条件引起的粘性应力，流体粒子在此处旋转。 这将我们引向本章的最后一节（第 10-6 节），我们将在其中讨论边界层近似。

**10-6 边界层近似** 2021年8月5日14点14分

正如第10-4节和第10-5节所讨论的,至少有两种流动情况可以忽略Navier-Stokes方程中的粘性项.第一种发生在流动的高雷诺数区域,与惯性和/或压力相比,已知净粘性力可以忽略不计;我们称这些为无粘性流动区域.第二种情况发生在涡度可以忽略不计的时候;我们称这些为无旋或潜在的流动区域。在任何一种情况下,从Navier-Stokes方程中去除粘性项都会产生Euler方程(方程10-13以及方程10-25).虽然通过删除粘性项大大简化了数学运算,但在将欧拉方程应用于实际工程流动问题方面存在一些严重的缺陷.缺陷列表中最重要的是无法指定实体壁的无滑移条件.这会导致非物理结果,例如固体壁上的粘性剪切力为零,浸入自由流中的物体的气动阻力为零.因此,我们可以将欧拉方程和纳维-斯托克斯方程视为被巨大鸿沟隔开的两座山(图10-75a).我们对边界层近似做出以下声明:

边界层近似弥合了Euler方程和Navier-Stokes方程之间的差距,以及实体壁的滑移条件和无滑移条件之间的差距(图10-75b).

从历史的角度来看,到1800年代中期,纳维-斯托克斯方程是已知的,但除了非常简单的几何流动外无法求解.同时,数学家能够获得欧拉方程和复杂几何流动的势流方程的漂亮解析解,但他们的结果往往在物理上毫无意义.因此,研究流体流动的唯一可靠方法是凭经验,即通过实验.流体力学的重大突破发生在1904年,当时Ludwig Prandtl(1875-1953)引入了**边界层近似**. Prandtl的想法是将流动分为两个区域:一个无粘性和/或无旋转的**外部流动区域**,以及一个称为**边界层**——靠近固体壁的非常薄的流动区域的内部流动区域,其中粘性力和旋转性不能忽略(图10-76).在外流区,我们用连续性和欧拉方程得到外流速度场,用伯努利方程得到压力场.或者,如果外流区域是无旋的,我们可以使用第10-5节中讨论的势流技术(例如,叠加)来获得外流速度场.在任何一种情况下,我们首先求解外部流动区域,然后在不能忽略旋转性和粘性力的区域中拟合薄边界层.在边界层内,我们求解**边界层方程**,稍后将讨论.(注意,边界层方程本身就是完整Navier-Stokes方程的近似值,正如我们将看到的.)

边界层近似通过提供一种强制执行无滑移约束的方法来纠正欧拉方程的一些主要缺陷.在实心墙壁上.因此,粘性剪切力可以沿着壁存在,浸入自由流中的物体可以受到空气动力阻力,并且可以更准确地预测不利压力梯度区域的流动分离.因此,在1900年代的大部分时间里,边界层概念成为工程流体力学的主力军.然而,20世纪后期快速,廉价的计算机和计算流体动力学(CFD)软件的出现使Navier-Stokes方程的数值解能够用于复杂几何体的流动.因此,今天不再需要将流动分成外部流动区域和边界层区域——我们可以使用CFD来求解整个流场中的全套运动方程(连续性加上Navier-Stokes).尽管如此,边界层理论在某些工程应用中仍然有用,因为得出解决方案所需的时间要少得多.此外,我们可以通过研究边界层来了解流动流体的行为.我们再次强调,边界层解决方案只是完整Navier-Stokes解决方案的近似值,我们在应用此或任何近似值时必须小心.

成功应用边界层近似的关键是假设边界层非常薄.经典示例是平行于与x轴对齐的长平板流动的均匀流.图10-77中描绘了沿板的某个位置x处的**边界层厚度**.按照惯例,𝛿通常定义为距壁的距离,此时平行于壁的速度分量是边界层外流体速度的99%.事实证明,对于给定的流体和板块,自由流速度V越高,边界层越薄(图10-77).在无量纲方面,我们根据沿墙的距离x定义雷诺数,

因此,

在给定的x位置,雷诺数越高,边界层越薄.

换句话说,雷诺数越高,所有其他条件都相同,边界层近似越可靠.当(或者,无量纲表示为)时,我们确信边界层很薄.

边界层剖面的形状可以通过流动可视化实验获得.图10-78中显示了平板上层流边界层的示例.60多年前由F.X.Wortmann拍摄,现在被认为是层流平板边界层剖面的经典照片.无滑移条件在壁面得到了清晰的验证,远离壁面的流速平稳增加证实了流动确实是层流.

请注意,尽管我们讨论的是与实体壁附近的薄区域相关的边界层,但边界层近似并不限于壁边界流动区域.相同的方程可以应用于**自由剪切层**,例如射流,尾流和混合层(图10-79),前提是雷诺数足够高,这些区域很薄.这些具有不可忽略的粘性力和有限涡度的流场区域也可以被认为是边界层,即使实体壁边界甚至可能不存在.边界层厚度𝛿(x)在图10-79的每个草图中都有标记.正如你所看到的,按照惯例𝛿通常是基于自由剪切层总厚度的一半来定义的.我们将𝛿定义为从中心线到边界层边缘的距离,其中速度的变化是从中心线到外流的最大速度变化的99%.边界层厚度不是常数,而是随下游距离变化.在此处讨论的示例(平板,喷射,尾流和混合层)中,𝛿(x)随x 增加.然而,存在流动情况,例如沿壁快速加速的外流,其中𝛿(x)随x减小.

流体力学初学者的一个常见误解是,将𝛿表示为x的函数的曲线认为是流线——它不是!在图10-80中,我们绘制了生长在平板上的边界层的流线和𝛿(x).随着边界层厚度向下游增加，穿过边界层的流线必须略微向上发散以满足质量守恒.这种向上位移的量小于𝛿(x)的增长.由于流线穿过曲线𝛿(x),所以𝛿(x)显然不是流线(流线不能相互交叉,否则质量将不守恒).

对于生长在平板上的层流边界层,如图10-80所示,边界层厚度𝛿至多是和流体属性𝜌和𝜇的函数.这是量纲分析中的一个简单练习,以表明是的函数.事实上,事实证明𝛿与的平方根成正比.但是,您必须注意,此结果仅适用于平板上的层流边界层.随着我们将板块向下移动到越来越大的x值,随x线性增加.在某一时刻,流动中的无穷小湍流开始增长,边界层不能保持层流——它开始向湍流流动的**过渡**过程.对于具有均匀自由流的光滑平板,过渡过程从临界雷诺数,开始,一直持续到边界层在过渡雷诺数(图10-81).过渡过程相当复杂,细节超出了本文的范围.

请注意,在图10-81中,垂直比例被大大夸大了,而水平比例已被缩短(实际上,由于是的30倍,过渡区域比图中所示的要长得多).为了让您更好地了解边界层的实际厚度,我们在图10-82中将𝛿绘制为的函数以进行缩放.为了生成图,我们仔细选择了参数,使得,而不管的单位如何.因此,发生在处,发生在图中的处.请注意边界层有多薄以及按比例绘制时过渡区域有多长.

在实际工程流中,与具有平静自由流的光滑平板的值相比,向湍流的转变通常发生得更突然且更早(值较低).沿表面的粗糙度,自由流扰动,声学噪声,流动不稳定性,振动和壁曲率等因素都会导致较早的过渡位置.因此,工程临界雷诺数通常用于确定边界层是最有可能是层流()还是最有可能是湍流().在传热中使用该值作为临界Re 也很常见;事实上,平均摩擦系数和传热系数的关系是通过假设的层流低于和湍流而导出的.这里的逻辑是通过将过渡的第一部分视为层流而将其余部分视为湍流来忽略过渡.除非另有说明,我们在本书的其余部分都遵循这一约定.

`即使使用现代CFD代码,转换过程也不稳定且难以预测.在某些情况下,工程师会沿表面安装粗糙的砂纸或称为绊线的电线,以便在所需位置强制过渡(图10-83).来自绊线的涡流会增强局部混合并产生湍流,很快就会导致湍流边界层.同样,出于说明目的,图10-83中的垂直比例被大大夸大了.

**边界层方程**

现在我们对边界层有了物理感觉,我们需要在边界层计算中使用运动方程——**边界层方程**.为简单起见,我们只考虑笛卡尔坐标系中平面中的稳定二维流.然而,这里使用的方法可以扩展到轴对称边界层或任何坐标系中的三维边界层.我们忽略重力,因为我们不处理自由表面或浮力驱动的流动(自由对流),其中重力效应占主导地位.我们只考虑层流边界层;湍流边界层方程超出了本文的范围.对于沿着实体壁的边界层的情况,我们采用坐标系,其中处处平行于壁,处处垂直于壁(图10-85).该坐标系称为**边界层坐标系**.当我们求解边界层方程时,我们一次在一个x位置求解,局部使用这个坐标系,并且它是局部正交的.我们定义的位置并不重要,但对于流过物体的流,如图10-85所示,我们通常在前驻点处设.

我们从本章开头推导出的无量纲Navier-Stokes方程开始.忽略非稳定项和重力项,方程10-6变为

欧拉数是统一的,因为边界层外的压力差由伯努利方程和确定.我们注意到V是外部流的特征速度标度,通常等于沉浸在均匀流中的物体的自由流速度.在这个无量纲化中使用的特征长度尺度是L,物体的一些特征尺寸.对于边界层,x的数量级为L,方程10-61中的雷诺数可以被认为是(方程10-60).在边界层近似的典型应用中非常大.这样看来,我们可以忽略边界层中方程10-61中的最后一项.但是,这样做会导致欧拉方程以及之前讨论的所有缺陷.因此,我们必须至少保留公式10-61中的一些粘性项.

我们如何决定保留哪些项,忽略哪些项?为了回答这个问题,我们根据边界层内的适当长度和速度尺度重做运动方程的无量纲化.图10-86中描绘了图10-85中边界层的一部分的放大视图.由于x的数量级是L,我们使用L作为适当的长度尺度,用于流向距离以及速度和压力相对于x的导数.然而,这个长度尺度对于关于y的导数来说太大了.使用𝛿作为垂直于流向的方向上的距离和关于y的导数的长度尺度更有意义.类似地,虽然整个流场的特征速度标度为V,但使用U作为边界层的特征速度标度更为合适,其中U是平行于壁面正上方位置处的速度分量的大小.边界层(图10-86).U通常是x的函数.因此,在某个x值的边界层内,数量级为

速度分量𝜐的数量级没有在公式10-62中指定,而是从连续性公式中获得.将方程10-62中的数量级应用于二维不可压缩连续性方程,

由于这两项必须相互平衡,因此它们必须具有相同的数量级.因此我们得到速度分量的数量级,

由于在边界层中(边界层非常薄),我们得出结论在边界层中(图10-87).从方程10-62和10-63,我们在边界层内定义了以下无量纲变量:

由于我们使用了适当的尺度,所有这些无量纲变量都是有序统一的——即,它们是归一化的变量(第7章).

我们现在考虑Navier-Stokes方程的x和y分量.我们将这些无量纲变量代入y动量方程,给出

经过一些代数并将每一项乘以后,我们得到,

比较公式10-64中的项,由于,右侧的中间项显然比任何其他项小几个数量级.出于同样的原因,右侧的最后一项远小于右边的第一项.忽略这两项,留下左边两项和右边第一项.然而,由于,压力梯度项比方程左侧的对流项大几个数量级.因此,方程10-64中剩下的唯一项是压力项.由于等式中没有其他项可以平衡该项,我们别无选择,只能将其设置为零.因此,无量纲动量方程简化为

或者,就物理变量而言,

换句话说,虽然压力可能沿壁(在x方向)变化,但在垂直于壁的方向上的压力变化可以忽略不计.这在图10-88中进行了说明.在处,在从壁到外流的边界层的所有y值处都相同.在其他一些x位置,,压力可能已经改变,但在边界层那部分的所有y值处.

跨边界层(y方向)的压力几乎是恒定的.

在物理上,由于边界层非常薄,在边界层厚度的尺度上观察时,边界层内的流线的曲率可以忽略不计.弯曲的流线需要向心加速度,它来自沿曲率半径的压力梯度.由于流线在薄边界层中没有明显弯曲,因此边界层上没有明显的压力梯度.

方程10-65和刚刚提出的陈述的一个直接结果是,在沿壁的任何x位置,边界层外边缘处的压力()与壁处的压力相同().这导致了巨大的实际应用;即，边界层外边缘的压力可以通过在边界层正下方的壁上的静压抽头进行实验测量(图10-89).实验人员经常利用这种幸运情况,在过去的一个世纪里,无数的飞机机翼和涡轮机械叶片的翼型都用这种测压器进行了测试.

图10-64中显示的流过圆柱体的实验压力数据是用圆柱体表面的测压口测量的,但它们用于与通过无旋外流近似计算得出的压力进行比较.这种比较是有效的,因为在边界层外获得的压力(来自欧拉方程或结合伯努利方程的势流分析)一直适用于通过边界层到壁的压力.

回到边界层方程的发展,我们使用方程10-65来大大简化动量方程的x分量.具体来说,由于不是的函数,我们用替换了,其中P是根据我们的外流近似计算得出的压力值(使用连续性加欧拉,或势流方程加伯努利).Navier-Stokes方程的x分量变为

经过一些代数,每一项乘以后,我们得到

比较公式10-66中的项,右侧中间项显然比左侧项小几个数量级,因为.那么右边的最后一项呢?如果我们忽略这一项,我们就扔掉所有粘性项,回到欧拉方程.显然,这一项必须保留.此外,由于等式10-66中的所有其余项都是一阶的,所以等式10-66右侧最后一项括号中的参数组合也必须是一阶的,

再次认识到,我们立即看到

这证实了我们之前的陈述,即在沿壁的给定流向位置,雷诺数越大,边界层越薄.如果我们在方程10-67中用x代替L,我们还得出此结论,对于平板上的层流边界层,其中常数,𝛿像x的平方根一样增长(图10-90).

就原始(物理)变量而言,方程10-66写为

请注意,方程10-68中的最后一项在边界层中不可忽略,因为速度梯度𝜕u/𝜕y的y导数足够大以抵消运动粘度𝜈的(通常很小)值.最后,因为我们从y动量方程分析中知道边界层上的压力与边界层外的压力相同(方程10-65),们将伯努利方程应用于外流区域.对x进行微分,我们得到

我们注意到P和U都是x的函数,如图10-91所示.将方程10-69代入方程10-68得到

我们已经从边界层方程中消除了压力.我们总结了平面中稳定,不可压缩,没有显着的重力效应的层流边界层运动方程组,

在数学上,完整的Navier-Stokes方程在空间上是椭圆的,这意味着在流域的整个边界上都需要边界条件.在物理上,流信息在所有方向上传递,包括上游和下游.另一方面,x动量边界层方程(方程10-71的第二个方程)是抛物线的,这意味着我们只需要在(二维)流域的三个边上指定边界条件.在物理上,流信息不会沿与流相反的方向(从下游)传递.这一事实大大降低了求解边界层方程的难度.具体来说,我们不需要在下游指定边界条件,只需要在上游以及流域的顶部和底部指定边界条件(图10-92).对于沿壁的典型边界层问题,我们指定壁处的无滑移条件(处),边界层边缘处的外部流动条件以及超出[随],以及某个上游位置的起始剖面[处,其中可能为零也可能不为零].有了这些边界条件,我们只需沿x方向向下游前进,边走边求解边界层方程.这对于数值边界层计算特别有吸引力,因为一旦我们知道一个x位置()的轮廓,我们就可以前进到下一个x位置(),然后使用这个新计算的轮廓作为开始轮廓行进到下一个x位置(),等等.

**边界层流程**

当采用边界层近似时,我们使用一般的逐步程序.我们在这里概述了该过程,并在图10-93中以简要形式进行了概述.

步骤1 求解外部流动,忽略边界层(假设边界层外的流动区域近似无粘性和/或无旋).根据需要变换坐标以获得.

步骤2 假设边界层很薄——实际上很薄,以至于它不会影响步骤1的外流解.

步骤3 求解边界层方程(方程10-71),使用合适的边界条件:壁面无滑移边界条件,处;边界层边缘的已知外流条件,随;和一些已知的起始轮廓,处.

步骤4 计算流场中的感兴趣量.例如,一旦求解了边界层方程(步骤3),我们计算𝛿(x),沿壁的剪应力,总表面摩擦阻力等.

步骤5 验证边界层近似值是否合适.换句话说,验证边界层很薄——否则近似是不合理的.

在我们做任何例子之前,我们在这里列出边界层近似的一些限制.这些是执行边界层计算时需要注意的危险信号:

如果雷诺数不够大,边界层近似就会失效.多大才够大?这取决于所需的近似精度.使用公式10-67作为指导原则,对于,(3%);对于,(1%).

如果壁面曲率与𝛿的大小相似(图10-94),则y方向上零压力梯度的假设(方程10-65)不成立.在这种情况下,不能忽略流线曲率引起的向心加速度效应.从物理上讲,当不时,边界层不够薄,因此近似值不合适.

当雷诺数太高时,边界层不会保持层流,如前所述.边界层近似本身可能仍然适用,但如果流动是过渡流或完全湍流,则方程10-71无效.如前所述,清洁流动条件下光滑平板上的层流边界层在处开始向湍流过渡.在实际工程应用中,壁面可能不光滑,可能存在振动,噪声和波动.墙上方的自由流动,所有这些都有助于更早地开始过渡过程.

如果发生流动分离,边界层近似不再适用于分离的流动区域.造成这种情况的主要原因是分离的流动区域包含反向流动,并且失去了边界层方程的抛物线性质.

**位移厚度**

如图10-80所示,随着边界层厚度向下游增加,边界层内外的流线必须稍微向外弯曲远离壁,以满足质量守恒.这是因为速度的y分量,𝜐很小但有限且为正.在边界层之外,流线的这种偏转会影响外部流动.我们将**位移厚度**定义为边界层外的流线偏转的距离,如图10-102所示.

位移厚度是边界层外的流线由于边界层的影响而偏离壁面的距离.

我们通过使用质量守恒进行控制体积分析,为沿平板的边界层生成的表达式.细节留给读者作为练习;沿着板的任何x位置的结果是

请注意.方程10-72中积分的上限显示为∞,但由于u=U在边界层上方的任何位置,因此必须仅积分到𝛿上方的某个有限距离.显然随x增长为边界层增长(图10-103).对于层流平板,我们对示例10-10的数值(Blasius)解进行积分以获得

的等式与的相同,但具有不同的常数.事实上,对于平板上的层流,任何x位置的比同一x位置的大约小三倍(图10-103).

有一种替代方法可以解释的物理含义,结果证明它对实际工程应用更有用.也就是说,从无粘性和/或无旋外流区域的角度来看,我们可以将位移厚度视为壁厚的假想或表观增加.对于我们的平板示例,外流不再“看到”无限薄的平板;相反,它看到的是一个有限厚度的板.形状类似于方程10-73的位移厚度,如图 10-104 所示.

位移厚度是壁厚的假想增加,如外流所见,由于边界层增长的影响.

如果我们要解决这个假想的较厚板周围流动的欧拉方程,外部流速分量U(x)将与原始计算不同.然后我们可以使用这个明显的U(x)来改进我们的边界层分析.您可以想象对图10-93中边界层程序的修改,其中我们经过前四步,计算然后返回到步骤1,这次使用假想的(较厚的)物体形状计算表观U(x).在此之后,我们求解边界层方程.我们可以根据需要多次重复循环直到收敛.这样,外流和边界层将更加一致.

如果我们考虑进入由两个平行壁围成的通道的均匀流动(图10-105),这种位移厚度解释的有用性就变得明显了.随着边界层在上壁和下壁上生长,非旋转核心流必须加速以满足质量守恒(图10-105a).从边界层之间的核心流动的角度来看,边界层使通道壁看起来会聚——壁之间的表观距离随着x的增加而减小.其中一个壁的厚度的假想增加等于,并且核心流的表观U(x)必须相应增加,如图所示,以满足质量守恒.

**动量厚度**

边界层厚度的另一种测量方法是**动量厚度**,通常用符号𝜃表示.通过分析图10-109中平板边界层的控制体积可以最好地解释动量厚度.由于控制体积的底部是板块本身,任何质量或动量都不能穿过这个表面.控制体的顶部被视为外流的流线.由于没有流体可以穿过流线,所以控制体积的上表面就不可能有质量或动量通量.当我们对这个控制体积应用质量守恒定律时,我们发现从左边(x=0处)进入控制体积的质量流量一定等于从右边(沿平板任意位置x处)流出的质量流量,

其中为图10-109中进入页面的宽度,我们任意取为单位宽度,为处板到外流线的距离,如图10-109所示.由于u=U沿控制体积左面处处为常数,由于和沿控制体积右面处处为u=U,则式10-74简化为

在物理上,边界层内的质量流动亏损(图10-109中下方蓝色阴影区域)被厚度为的大块自由流(图10-109中上部蓝色阴影区域)所取代.由公式10-75可知,这两个阴影区域的面积相等.在图10-110中,我们放大以更清楚地显示这些区域.

现在考虑控制体积动量方程的分量.由于没有动量穿过上下控制面,作用在控制体积上的合力必须等于离开控制体积的动量通量减去进入控制体积的动量通量,

式中为板从x=0到位置x处的阻力.经过代数运算,包括代入式10-75,式10-76简化为

最后,我们定义动量厚度𝜃,使板上每单位宽度进入页面的粘性阻力等于乘以,即:

用语言描述为,

动量厚度定义为由于边界层的存在而增加的单位宽度动量通量的损失除以.

方程10-78化简为

流线高度可以为任意值,只要作为控制体上表面的流线位于边界层之上即可.由于对于任何大于y的Y,我们可以将等式10-79中的Y替换为无穷,而𝜃的值不变,

对于层流平板边界层Blasius解的具体情况(例10-10),我们对式10-80进行数值积分得到

我们注意到𝜃的方程与𝛿或𝛿\*的方程是相同的,只是有一个不同的常数.事实上,对于平面上的层流,𝜃在任意x位置上大约是𝛿的13.5%,如图10-111所示.𝜃/x(公式10-81)与(例10-10的公式10)并非巧合,两者都是由板上的表面摩擦阻力推导而来.

**湍流平板边界层** 2021年8月6日12点06分

推导或尝试求解湍流边界层方程超出了本文的范围.由于我们无法求解湍流的边界层方程,因此边界层廓线形状和湍流边界层的其他性质的表达式是经验的(或至多半经验的).还要注意,湍流本质上是非定常的,瞬时速度剖面形状随时间而变化(图10-112).因此,这里讨论的湍流表达式都是时间平均值.湍流平板边界层的时间平均速度分布的一个常见的经验近似是**七分之一定律**,

请注意,在方程10-82的近似中,𝛿不是99%的边界层厚度,而是边界层的实际边缘,这与层流的定义𝛿不同.方程10-82绘制在图10-113中.相比之下,层流平板边界层概要(Blasius方程的数值解图10-99)也绘制在图10-113,使用纵轴的相似性变量.你可以看到,如果层流和湍流边界层厚度是相同的,湍流的会比层流的更满.换句话说,湍流边界层会更紧密地“拥抱”壁面,使边界层在靠近壁面的地方充满高速流动.这是由于大的湍流涡旋将高速流体从边界层的外部输送到边界层的下部(反之亦然).换句话说,与层流边界层相比,湍流边界层的混合程度要大得多.在层流情况下,由于粘性扩散,流体混合缓慢.然而,湍流中较大的涡流会促进更迅速和彻底的混合.

方程10-82的近似湍流边界层速度廓线形状在非常接近壁面()时没有物理意义,因为它预测了斜率()在处是无限的.对于湍流边界层,壁面处的坡度很大,但仍然是有限的.这个较大的壁面坡度导致了非常高的壁面剪应力,,因此,相应地,沿着板的表面有很高的表面摩擦(与相同厚度的层流边界层相比).由层流和湍流边界层产生的表面摩擦阻力将在第11章中进行更详细的讨论.

像图10-113这样的无量纲图有点误导人,因为在相同雷诺数下,湍流边界层实际上要比相应的层流边界层厚得多.这个事实在例10-12的物理变量中得到了说明.

比较了光滑平板上的层流边界层和湍流边界层𝛿，𝛿\*，𝜃和Cf, x的表10-4表达式.湍流表达式是基于方程10-82的七次方定律.请注意,表10-4中湍流平板边界层的表达式仅对非常光滑的表面有效.即使是很小的表面粗糙度也会极大地影响湍流边界层的特性,如动量厚度和局部表面摩擦系数.表面粗糙度对湍流平板边界层的影响将在第11章中详细讨论.

七分之一幂律并不是流体力学家使用的唯一湍流边界层近似.另一个常见的近似是**对数定律**,半经验表达式是有效不仅对平板边界层还对充分发展湍流管流速度概要(第八章).事实上,对数定律是适用于几乎所有wall-bounded湍流边界层,而不仅仅是在平板上流动.(这种幸运的情况使我们能够在计算流体动力学代码中使用接近固体壁面的对数定律近似,如第15章所述.)对数定律通常用无量纲变量表示,以称为**摩擦速度**的特征速度表示.(注意,大多数作者使用而不是.我们用下标将量纲量与表示无量纲速度的区分开来)

其中

𝜅和B为常数;它们的通常值为到0.41,B=5.0到5.5.不幸的是,对数定律受到这样一个事实的影响:它在靠近壁面的地方不起作用(ln 0没有定义).它也偏离了接近边界层边缘的实验值.然而,方程10-83适用于湍流平板边界层的很大一部分,它是有用的,因为它通过方程10-84将速度剖面形状与壁面剪应力的局部值联系起来.

1961年,D.B.斯伯丁(D.B.Spalding)提出了一个巧妙的表达,它适用于所有墙壁,被称为**斯伯丁墙定律**,

虽然方程10-85比方程10-83更接近壁面,但在边界层的外层(通常称为**外层**或**湍流层**),这两个方程都不成立.Coles(1956)引入了一个经验公式,称为**尾流函数**或**尾流定律**,它很好地符合这一区域的数据.把科尔斯方程加到对数定律中,就得到了所谓的**壁流定律**,

其中用于平板边界层,给出了的几种表达式,这些表达式都平滑地从壁面处的0()变为边界层外缘处的1().一个流行的表达是,

**带有压力梯度的边界层**

到目前为止,我们的大部分讨论都是关于平板边界层的.对工程师来说,更实际的问题是任意形状壁面上的边界层.这包括浸入自由流的物体上方的外部流动(图10-120a),以及一些内部流动,如风洞壁和其他大型管道的壁面,其中边界层沿壁面发展(图10-120b).就像前面讨论的零压力梯度平板边界层一样,非零压力梯度的边界层可以是层流或湍流.我们经常使用平板边界层的结果作为对诸如转捩位置,边界层厚度,表面摩擦等问题的粗略估计.然而,当需要更高的精度时,我们必须使用图10-93所示的程序来求解边界层方程(稳态,层流,二维情况下的方程10-71).由于x-动量方程中的压力梯度项()是非零的,因此比平板的分析要困难得多.这样的分析很快就会变得很复杂,特别是对于三维流动的情况.因此,我们只讨论带有压力梯度的边界层的一些定性特征,边界层方程的详细解留给高级流体力学教科书(如Panton, 2005;White,2005).

首先一些术语.当无粘和/或无旋转外流动区(边界层外)的流动加速时,增大,减小.我们称之为**顺压梯度[favorable pressure gradient]**.这是有利或可取的,因为在这样一个加速流动中的边界层通常很薄,紧贴壁面,因此不太可能从壁面分离.当外气流减速时,U(x)减小，P(x)增大,形成不利或**逆压力梯度**.顾名思义,这种情况是不理想的,因为边界层通常较厚,不紧贴壁面,而且更有可能与壁面分离.

在典型的外部流动中,例如飞机机翼上方的流动(图10-121),机体前部的边界层受到一个有利的压力梯度,而后部的边界层受到一个不利的压力梯度.当逆压梯度足够强(较大)时,边界层很可能**脱离**壁面.图10-122中显示了外部和内部流动的流动分离示例.在图10-122a是一个草图翼型在一个适中的攻角.边界层仍然附着在机翼的整个下表面,但它分离的地方附近的上表面的草图.闭合的流线表示一个称为分离泡的再循环流动区域.如前所述,边界层方程是抛物型的,这意味着没有信息可以从下游边界向上游传递.然而,分离导致靠近壁面的反向流动,破坏了流场的抛物线性质,使得边界层方程不适用.

由于分离气泡中的反向流动，边界层方程在分离点下游无效.

在这种情况下,必须用完整的Navier-Stokes方程来代替边界层近似.从图10-93的边界层过程来看,当发生分离时,特别是在分离点以外,步骤1计算的外流动不再有效,这导致了该过程的中断(对比图10-121和图10-122a).

图10-122b显示了翼型在攻角过高时的经典情况,其中分离点移动到翼型的前面附近;分离气泡几乎覆盖了机翼的整个上表面——这种情况被称为失速.失速伴随着升力的损失和气动阻力的显著增加,这将在第11章中详细讨论.在内部流动中也可能发生流动分离,例如在扩压器的逆压梯度区域(图10-122c).正如所画的,分离常常只在扩散器的一侧不对称地发生.与带有分离的翼型一样,扩压器内的外流动计算不再有意义,边界层方程也不再有效.扩压器内的流动分离导致压力恢复显著降低,这种情况也称为失速情况.

通过研究壁面处的边界层动量方程,我们可以对不同压力梯度条件下的速度剖面形状有很多了解.由于壁面速度为零(无滑移条件),方程10-71b的整个左侧消失,只留下压力梯度项和粘性项,它们必须平衡,

在顺压梯度条件下(加速外流),为正值,根据公式 10-88,u在壁面的二阶导数为负值,即 .我们知道,当u在边界层边缘接近U(x)时,必须保持为负.因此,我们期望跨边界层的速度剖面是圆形的,没有任何拐点,如图10-123a所示.在零压力梯度条件下,为零,这意味着u相对于壁附近的y线性增长,如图10-123b所示.(这一点已通过平板上零压力梯度边界层的Blasius边界层剖面验证,如图10-99所示.)对于逆压梯度,为负,公式10-86要求为正.然而,由于当u在边界层边缘接近U(x)时,必须为负,因此边界层某处必须有一个拐点(),如图10-123c所示.

u相对于y在壁面上的一阶导数与成正比,即壁面剪应力[].图10-123a到c中的比较表明,对于顺压梯度最大,对于逆压梯度最小.边界层厚度随着压力梯度的符号变化而增加,如图10-123所示.如果逆压梯度足够大,变为零(图10-123d);沿壁的这个位置是分离点,超过该点有反向流动和分离气泡(图10-123e).请注意,由于 的负值,超出分离点的为负值如前所述,边界层方程在逆流区域失效,因此,边界层近似可能适用于分离点,但不适用于超出.

我们使用计算流体动力学(CFD)来说明流过沿壁隆起的情况下的流动分离.流动是稳定的二维流动,图10-124a显示了由欧拉方程的解产生的外部流动流线.没有粘性项就没有分离,流线是前后对称的.如图所示,凸起的前部经历了加速流动,因此有一个顺压梯度.后部经历减速流动和逆压梯度.当求解完整的(层流)纳维-斯托克斯方程时,粘性项会导致凸块后端的流动分离,如图10-124b所示.请记住,这是Navier-Stokes解,而不是边界层解;尽管如此,它还是说明了边界层中的流动分离过程.分离点的大致位置如图10-124b所示,红色虚线为一种**分割流线**.低于此流线的流体被分离泡捕获,而高于此流线的流体继续向下游流动.图10-124c显示了流线的特写视图,使用相同的特写视图在图10-124d中绘制了速度矢量.分离气泡下部的逆流清晰可见.此外,分离点以外的速度有很强的y分量,外流不再几乎与壁平行.事实上,分离的外流与图10-124a的原始外流完全不同.这是典型的并且代表边界层方法的严重缺陷.也就是说,边界层方程可能能够很好地预测分离点的位置,但不能预测分离点以外的任何东西.在某些情况下,分离点上游的外流也发生显着变化,边界层近似给出了错误的结果.

边界层近似仅与外流解一样好;如果流动分离显着改变了外部流动,则边界层近似是错误的.

图10-123中绘制的边界层和图10-124中绘制的流动分离速度矢量是针对层流的.湍流边界层在性质上具有相似的行为,尽管如前所述,在类似条件下,湍流边界层的平均速度剖面比层流边界层要完整得多.因此需要更强的逆压力梯度来分离湍流边界层.我们做出以下一般陈述:

湍流边界层比暴露于相同逆压梯度的层流边界层更能抵抗流动分离.

该陈述的实验证据如图10-125所示,其中外流试图通过20°角急转弯.层流边界层(图10-125a)无法通过急转弯,并在拐角处分离.另一方面,湍流边界层(图10-125b)设法保持附着在尖角周围.作为另一个示例,重新计算与图10-124相同的凹凸处的流动,但在模拟中模拟了湍流.湍流CFD计算生成的流线如图10-126所示.请注意,湍流边界层保持附着(无流动分离),与分离凸块后部的层流边界层形成对比.在湍流情况下,外流欧拉解(图10-124a)是整个凸块的合理近似,为没有流动分离并且边界层仍然非常薄.类似的情况发生在流过像球体这样的虚张声势的物体上。例如，一个光滑的高尔夫球会在其表面保持层流边界层，边界层很容易分离，从而导致较大的气动阻力。高尔夫球具有凹坑（一种表面粗糙度），以便早期过渡到湍流边界层。流动仍然与高尔夫球表面分离，但在边界层下游更远，导致空气动力阻力显着降低。这在第 11 章有更详细的讨论.

**边界层的动量积分技术**

在很多实际工程应用中,我们不需要知道边界层内部的所有细节;相反,我们寻求对边界层的总体特征(例如边界层厚度和皮肤摩擦系数)的合理估计.**动量积分技术**利用控制体积方法来获得沿具有零或非零压力梯度的表面的边界层属性的这种定量近似值.动量积分技术很简单,在某些应用中不需要使用计算机.它对层流和湍流边界层都有效.

我们从图10-127中勾画的控制体积开始.控制体积的底部是y=0处的壁，顶部是y=Y处,高度足以包围边界层的整个高度.控制体积是x方向上宽度为dx的无限薄切片.根据边界层近似, 𝜕P/𝜕y = 0，所以我们假设压力 P 沿着控制体积的整个左面作用，

在具有非零压力梯度的一般情况下，控制体积右侧面上的压力与左侧面上的压力不同。使用一阶截断泰勒级数近似（第 9 章），我们设置

以类似的方式，我们将通过左面的进入质量流量写为

和通过右面的传出质量为

其中 w 是图 10-127 中控制体进入页面的宽度。如果您愿意，可以将 w 设置为单位宽度；无论如何它会在以后取消。由于方程 10-90 与方程 10-89 不同，并且由于没有流动穿过控制体积的底部（壁），质量必须流入或流出控制体积的顶面。我们在图 10-128 中说明了一个不断增长的边界层的情况，其中 m。右脸 < 米。左脸，和米。顶部为正（质量流出）。控制体积上的质量守恒产生

我们现在对选定的控制体积应用 x 动量守恒。 x 动量通过左面引入，并通过控制体积的右面和顶面去除。控制体积外的净动量通量必须通过壁作用在控制体积上的剪应力和控制表面上的净压力所产生的力来平衡，如图 10-127 所示。因此，稳态控制体积 x 动量方程为

其中通过控制体积顶部表面的动量通量被视为通过该表面的质量流量乘以 U。一些项取消，我们将方程重写为

其中，我们使用公式 10-89 计算 , 和 w 和 dx 从每个剩余项中抵消。为方便起见，我们注意到 Y=Y0 dy。从外流（欧拉方程），dP/dx = −𝜌U dU/dx。将公式 10-90 中的每一项除以密度 𝜌 后，我们得到

我们利用逆向微分的乘积规则简化公式 10-93（图 10-129）。经过一些重新排列后，等式 10-91 变为

我们可以将 U 放入积分中，因为在任何给定的 x 位置，U 相对于 y 是常数（U 仅是 x 的函数）。我们将第一项乘以 U2，将第二项除以 U 得到

其中我们还在每个积分的上限中用无穷大代替 Y，因为对于所有大于 Y 的 y，u = U，因此积分的值不会因这种替换而改变。我们之前定义了平板边界层的位移厚度𝛿\*（方程10-72）和动量厚度𝜃（方程10-80）。在非零压力梯度的一般情况下，我们以相同的方式定义𝛿\*和𝜃，除了我们使用外部流速的局部值 U = U(x)，在给定的 x 位置代替常数 U，因为 U 现在随 x 变化。等式 10-94 因此写成更紧凑的形式为

方程 10-95 被称为卡门积分方程，以纪念普朗特的学生 Theodor von Kármán (1881-1963)，他是 1921 年第一个推导出方程的人。方程 10-95 的另一种形式是通过执行第一项的乘积规则，除以 U2，并重新排列，

我们将形状因子 H 定义为

和局部皮肤摩擦系数 Cf, x as

请注意，对于具有沿表面发展的非零压力梯度的边界层的一般情况，H 和 Cf, x 都是 x 的函数。我们再次强调，Kármán 积分方程和方程 10-95 到 10-98 的推导适用于沿壁的任何稳定的不可压缩边界层，无论边界层是层流、湍流还是介于两者之间。对于平板上边界层的特殊情况，U(x) = U = 常数，方程 10-96 简化为

虽然使用相当简单，但动量积分技术存在严重缺陷。 即，我们必须知道（或猜测）边界层轮廓形状才能应用卡门积分方程（图 10-131）。 对于具有压力梯度的边界层，边界层形状随 x 变化（如图 10-123 所示），进一步使分析复杂化。 幸运的是，不需要精确地知道速度剖面的形状，因为积分是非常宽容的。 已经开发了几种利用 Kármán 积分方程来预测边界层粗略特征的技术。 其中一些技术，例如 Thwaite 的方法，在层流边界层方面做得非常好。 不幸的是，针对湍流边界层提出的技术并没有那么成功。 许多技术需要计算机的帮助，超出了本教科书的范围。

在本章的最后，我们将给出一些具有启发性的结果，这些结果来自于对二维、与自由流对齐的无限小薄平板的CFD计算(图10-133)。在所有情况下，板长为1m (L = 1m)，流体为性质不变的空气𝜌=1.23kg/m3，𝜇=1.79× 10−5 kg/m·s。我们改变自由流速度V，使平板末端的雷诺数(ReL =𝜌VL/𝜇)从10−1(爬行流)到105(层流，但准备开始过渡到湍流)。所有情况都是不可压缩的，稳定的，层流Navier-Stokes解决方案产生的商业CFD代码。在图10-134中，我们绘制了在三个x位置的四种雷诺数情况下的速度矢量:x = 0(板的开始)，x = 0.5 m(板的中间)，x = 1m(板的末端)。我们还在每一种情况下在板块附近绘制流线。在图10-134a中，ReL = 0.1，蠕变流动近似是合理的。在对称体上流动的前后流场是近似对称的。注意流是如何围绕着板发散的，就好像它是有限厚度的一样。这是由于粘度和无滑移条件造成的大驱替效应。从本质上讲，靠近平板的流速是如此之小，以至于其余的水流“看到”它是一个阻塞物，在它周围的水流必须改道。速度的y分量在板的前面和后面都是显著的。最后，板的影响在各个方向延伸几十个板长到流的其余部分，这也是典型的蠕动流。如图10 - 134b所示，雷诺数增加了两个数量级，ReL = 10。这个雷诺数太高，不能被认为是蠕变流动，但又太低，不能被认为是合适的边界层近似。我们注意到一些与低雷诺数情况相同的特征，例如流线有很大的位移，在板的前后附近有显著的y分量速度。然而，位移效应不那么强烈，并且流动不再是前后对称的。当流体离开平板的末端时，我们看到惯性效应;惯性将流体扫入板块后面正在形成的尾流中。平板对其余流动的影响仍然很大，但远小于ReL = 0.1时的流动。图10-134c显示了在ReL = 1000时的CFD计算结果，ReL = 1000又增加了两个数量级。在这个雷诺数下，惯性效应开始主导整个流场的大部分粘性效应，我们可以开始称之为边界层(尽管相当厚)。在图10-135中，我们使用表10-4中给出的层流表达式计算边界层厚度。𝛿(L)在ReL = 1000处的预测值约为板长的15%，与图10-134c中x = L处的速度矢量图比较吻合。与图10-134a和图b中雷诺数较低的情况相比，位移效应大大降低，任何前船尾对称的痕迹都消失了。最后，雷诺数再次增加两个数量级，达到ReL = 100,000，如图10-134d所示。在这样大的雷诺数下，边界层近似的适用性是没有问题的。CFD结果表明，边界层非常薄，对外流动的影响很小。图10-134d的流线几乎处处平行，你必须仔细观察，才能看到板后薄薄的尾迹区域。在尾迹区，流线之间的距离比在流的其他部分稍远一些，因为在尾迹区，速度明显小于自由流速度。速度的y分量可以忽略不计，正如在非常薄的边界层中所预料的那样，因为位移厚度是如此之小。概要文件的x分量速度绘制在图10 - 136的每个四图10 - 134的雷诺数,加上一些额外的情况下其他值ReL。我们使用对数尺度纵轴单位m (y),因为y跨越好几个数量级。我们将横坐标非量纲化为u/ u，以便可以比较速度剖面形状。当以这种方式绘制时，所有的概要文件都有某种类似的形状。然而，我们注意到一些剖面在速度剖面的外侧有一个显著的速度超调(u > u)。这是前面讨论过的位移效应和惯性效应的直接结果。当ReL值很低(ReL≤100)时，位移效应最显著，几乎不存在速度超调。这可以用低雷诺数时缺乏惯性来解释。没有惯性，就没有加速板块周围流动的机制;相反，粘性阻碍了板块附近各处的流动，而板块的影响在各个方向上延伸出数十个板块长度。例如，在ReL = 10−1时，u在y≅320 m之前不能达到u的99%，超过300板长在板上!在中等雷诺数(ReL介于101和104之间)时，位移效应是显著的，惯性项不再可以忽略。因此，流体能够在板周围加速，速度超调显著。例如，当ReL = 102时，最大速度超调约为5%。当雷诺数很高时(ReL≥105)，惯性项占主导地位，边界层很薄，位移效应几乎可以忽略。小的位移效应导致非常小的速度超调。例如，在ReL = 106时，最大速度超调仅约为0.4%。超过ReL = 106，层流在物理上不再真实，CFD计算将需要考虑湍流的影响。